• Produit Scalaire et Barycentres •

I – Etant donnés 2 vecteurs quelconques $\vec{U}$ et $\vec{V}$ démontrer la relation : $\vec{U}\bullet\vec{V} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{U} + \vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 - \|\vec{V}\|^2\right)$.

II – Etant donnés deux points A et B distants de a =12 cm, déterminer et construire les ensembles suivants, en prenant d'abord k = 8, puis en discutant suivant les valeurs de k.

1. Ensemble des points M du plan tels que l'on ait la relation $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$.
2. Ensemble des points M du plan tels que l'on ait la relation $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k$
3. Ensemble des points M du plan tels que l'on ait la relation $MA^2 + MB^2 = k$
4. Ensemble des points M du plan tels que l'on ait la relation $MA^2 - MB^2 = k$

III – Etant donné un triangle ABC isocèle rectangle en A de côté AB = AC = 6 cm, on appelle I le milieu de BC, et G le barycentre du système {(A,1); (B,2);(C,2)}, et soit M un point quelconque du plan contenant ABC.

1. Construire géométriquement le point G.
2. Calculer les longueurs BC^2, AI^2, GA^2, GB^2, GC^2.
3. Montrer que $MA^2 + 2\,MB^2 + 2\,MC^2 = 5\,MG^2 + GA^2 + 2\,GB^2 + 2\,GC^2$
4. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + 2\,MB^2 + 3MC^2 = 1440$

IV - Soit ABC un triangle quelconque, B' le milieu de AC, C' le milieu de AB.
Soit I le barycentre du système {(A,2),(B,2),(A,1),C,1)}.
Soit D le barycentre du système {(A,3),(B,2)}.
Soit E le barycentre du système {(B,2),(C,1)}.

1°) Faire la figure et construire les points D et E.
2°) Démontrer que le point I est l'intersection des segments [CD] et [B'C'].
3°) Démontrer que les points A,I,E sont alignés.

V - Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A, avec AB = AC = a.
Soit D le barycentre du système {(A,2); (B,-1)}. Soit E le barycentre du système {(A,2); (B,-1);(C,2)}.
Soit G l'isobarycentre de {A,B,C}.Soit I le milieu de [AC].

1°) a) Construire les points G, D et E.
b) Démontrer que les points D,E,C sont alignés.
c) Montrer que les points B,I,E sont alignés.
d) Montrer que I est le milieu de [GE] et que G est le milieu de [BE].
e) Démontrer que $DE = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

2°) Déterminer et construire l'ensemble (Δ) des points M du plan vérifiant la condition

$$\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$

3°) On appelle H le barycentre du système {(E,1);(G,2)}, et K celui de {(E,1);(G,-2)}. Montrer que K=B, puis déterminer et construire l'ensemble (C) des points M du plan vérifiant la condition

$$\| 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \| = 2\,\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$$

VI - Dessiner un triangle ABC et placer les milieux B' et C' des côtés [AC] et [AB].
Soit I le barycentre du système {(A;3);(B;2);(C;1)}.

1°) Démontrer que le point I appartient au segment [B'C']. Déterminer sa position et le placer sur la figure.
2°) Soit D le barycentre de {(A;3) ; (B;2)}. Démontrer que D est l'intersection des droites (AB) et (CI). Placer le point D sur la figure.
3°) Soit E l'intersection de (AI) et de (BC) démontrer que E est le barycentre de {(C;1);(B;2)}.

VII – Soit ABC un triangle quelconque, et O le centre du cercle circonscrit. Que peut-on dire de l'ensemble des points M du plan qui vérifient la relation $MA^2 + 2\,MB^2 – 3\,MC^2 = k$?