

Etude complète d une fonction numérique

Soit f définie par : $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Pour faire cette étude on pose : $f_1(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ et $f_2(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. On appelle respectivement (C_1) et (C_2) leurs courbes représentatives.

1. Ensemble de définition, et limites aux bornes :

On sait que le signe de la fraction $\frac{x-1}{x+1}$ est le même que le signe du produit $(x-1)(x+1)$, donc f_1 est définie sur l'intervalle $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$; f_2 est définie sur $] -1 ; 1 [$; et f sur $] -\infty ; -1[\cup] -1 ; +\infty [$, et en vertu des théorèmes généraux sur les limites (quotients, radicaux et produits) on a :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f_1(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -1^+} f_2(x) = -\infty \quad [x = -1 \text{ asympt. "vert."}] ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty ; f_1(1) = f_2(1) = f(1) = 0$$

2. Dérivée (pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$), signe et tableau des variations et des limites :

f_1 et f_2 ne sont pas dérivables en 1 ni en -1 au moyen des formules car la dérivée de $\sqrt{u}$ n'est pas définie pour les valeurs de x pour lesquelles $u(x) \leq 0$.

Pour $x \in] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$ on a :

$$f_1'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Donc $f_1'(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cong -1,6$ mais non en $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cong 0,6$. $\text{Sgn}[f_1'(x)] = \text{Sgn}[x^2 + x - 1]$ sur les intervalles $] -\infty ; -1[\cup] 1 ; +\infty [$, et on applique le théorème du signe du trinôme.

Pour $x \in] -1 ; 1 [$ on a :

$$f_2'(x) = -\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = -\frac{(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2})(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})}{(x+1)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

Donc $f_2'(x)$ s'annule et change de signe en $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \cong 0,6$ mais non en $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \cong -1,6$. $\text{Sgn}[f_2'(x)] = -\text{Sgn}[x^2 + x - 1]$ sur $] -1 ; 1 [$

x	$-\infty$	-1,6	-1	0,6	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+	0	-
		$f_1'(x)$		$f_2'(x)$	$-\infty$	$+\infty$
		-3,3		0,3		
f	$-\infty$	$\nearrow$	f_1	$\searrow$	f_2	$\nearrow$
			$-\infty$		0	$+\infty$

3. Dérivabilité de f_1 en 1^+ et dérivabilité de f_2 en 1^- .

Pour étudier la dérivabilité de f_1 et de f_2 en 1 il faut calculer directement les limites du taux d'accroissement en 1^+ et en 1^- respectivement, (NB : en -1 les fonctions f_1 et f_2 ne sont pas définies donc elles ne peuvent être dérivables, ni à droite, ni à gauche). Et d'autre part $f_1(1) = f_2(1) = 0$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f_1(x) - f_1(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \sqrt{\frac{x-1}{(x-1)^2(x+1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_2(x) - f_2(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -x \sqrt{\frac{1-x}{(x-1)^2(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

Donc ni f_1 ni f_2 ne sont dérivables en 1^+ et 1^- respectivement, donc f est non dérivable en 1. Mais en ce point (C_1) et (C_2) admettent une demi-tangente « verticale » formant un point de rebroussement pour (C) car $(C) = (C_1) \cup (C_2)$.

4. Equation de la tangente (T_0) à (C) au point O :

$$y = f_2'(0)(x-0) + f_2(0) = x$$

5. Représentation graphique :

On observe qu'il y a asymptote oblique (D) d'équation $y = x - 1$. En effet on peut montrer que la différence $[f_1(x) - (x-1)]$ a pour limite 0^+ en $+\infty$

En effet : $f_1(x) - (x-1) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - (x-1)$

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left[x - (x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right]$$

Et pour $x > 1$ on a $(x-1) = +\sqrt{(x-1)^2}$ d'où :

$$= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left[x - \sqrt{(x^2-1)} \right] = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}$$

expression dont la limite est bien 0^+ en $+\infty$, donc (C) au dessus de (D). Par une transformation analogue on montrerait que $[f_1(x) - (x-1)]$ tend vers 0^- en $-\infty$.

