[§ V] 1°) $\boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}}}$ IND° $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

P.l.l.i. : $\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{x^2\left[1+\frac{4}{x}\right]}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}} = \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$

Donc $\lim_{\substack{x\to+\infty\\(-\infty)}} \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \lim_{\substack{+\infty\\(-\infty)}} \left(\frac{x^2}{|x|}\right) \Rightarrow$ or $|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0$, $|x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0$ | Donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} (x) = \boxed{+\infty}$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} (-x) = \boxed{+\infty}$

2°) $\lim_{|x|\to+\infty} \left[\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} - |x+2|\right]$: IND° $\left[\frac{\infty}{\infty} - \infty\right]$.

a) $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$ et $|x| = +x$.

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} - (x+2) = \frac{(x^2+4x) - (x+2)\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$= \frac{(x^2+4x)^2 - (x+2)^2(x^2+4x+3)}{\left[(x^2+4x) + (x+2)\sqrt{x^2+4x+3}\right]\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$= \frac{(x^4+8x^3+16x^2) - (x^2+4x+4)(x^2+4x+3)}{\left[(x^2+4x) + (x+2)\sqrt{x^2+4x+3}\right]\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = |x| = +x$

$$= \frac{-(7x^2+28x+12)}{\left(x^2\left(1+\frac{4}{x}\right) + x\left(1+\frac{2}{x}\right)x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{-7x^2\left[1+\frac{4}{x}+\frac{12}{7x^2}\right]}{x^3\left[\left(1+\frac{4}{x}\right) + \left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right]\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$\Rightarrow \lim_{+\infty}\left[\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} - (x+2)\right] = \lim_{+\infty}\left[\frac{-7}{2x}\right] = \boxed{0^-}$. Donc $\boxed{y = x+2}$. (D_1) ASYMPTOTE à C_f en $+\infty$ (et situé en DESSOUS)

b) $x \to -\infty \Rightarrow x < -2 \Rightarrow |x+2| = -(x+2) = -x-2$.

$$\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} + (x+2) = \frac{(x^2+4x)^2 - (x+2)^2(x^2+4x+3)}{\left[(x^2+4x) - (x+2)\sqrt{x^2+4x+3}\right]\sqrt{x^2+4x+3}}$$

$$= \frac{-7x^2\left[1+\frac{4}{x}+\frac{12}{7x^2}\right]}{\left[x^2\left(1+\frac{4}{x}\right) - x\left(1+\frac{2}{x}\right)(-x)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right](-x)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{-7x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{12}{7x^2}\right)}{-x^3\left[\left(1+\frac{4}{x}\right) + \left(1+\frac{2}{x}\right)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right]\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$$

; donc $\lim_{-\infty}\left[\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} + (x+2)\right] = \lim_{-\infty}\left[\frac{7}{2x}\right] = \boxed{0^-}$

par suite $\boxed{y = -x-2}$ ASYMPTOTE à C_f en $-\infty$. et C_f en DESSOUS.

$f(x) = \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{x^2+4x}{\sqrt{(x+2)^2-1}} = \frac{x^2+4x}{\sqrt{(x+1)(x+3)}}$ (-1 racine "évidente"!...).

Donc $D_f =]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$. car $(x+1)(x+3) \leq 0$ sur $[-3;-1]$.

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \boxed{-\infty}$ car $\begin{cases} x^2+4x \to -3 \\ \sqrt{x^2+4x+3} \to 0^+ \end{cases}$ || $\lim_{-3^-} f = \boxed{-\infty}$ car $\begin{cases} x^2+4x \to -3 \\ \sqrt{x^2+4x+3} \to 0^+ \end{cases}$

Donc (C_f) est ASYMPTOTE à (Δ_1) $(x=-3)$ (à gauche).
et à (Δ_2) $(x=-1)$ (à droite).

• f DERIVABLE sur $]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$.

Calcul de $f'(x)$: $u(x) = x^2+4x \Rightarrow u'(x) = 2x+4$.
$v(x) = x^2+4x+3 \Rightarrow v'(x) = 2x+4$.

$$\left(\sqrt{v(x)}\right)' = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}} = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+3}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+4)\sqrt{x^2+4x+3} - (x^2+4x)\frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+3}}}{(x^2+4x+3)}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+4)(x^2+4x+3) - (x^2+4x)(x+2)}{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+4x+3}}$$

(NB) (*) Ici on peut et on doit FACTORISER $(x+2)$.

$$= \frac{(2x^3+12x^2+22x+12) - (x^3+6x^2+8x)}{(x^2+4x+3)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x^3+6x^2+14x+12}{(x^2+4x+3)^{\frac{3}{2}}} \overset{(*)}{=} \boxed{\frac{(x+2)(x^2+4x+6)}{(x^2+4x+3)^{3/2}}}.$$

$x^3+6x^2+14x+12$ s'annule pour $\boxed{x=-2}$.

(*) En effet le polynôme $P(x) = x^3+6x^2+14x+12$ est FACTORISABLE par $(x+2)$.
(Racine "évidente") Donc $P(x)$ est toujours STRICTEMENT POSITIF
De plus la fonction x^2+4x+6 sur $]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$
sur $\mathbb{R}$ et $x^2+4x+3>0$ sur ... D'où le tableau des variations :
Donc $\text{sgn}[f'(x)] = \text{sgn}[x+2]$.

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	$+\infty$
$x+2$	$-$	‖	$-\ 0$	‖	$+$	
f	$+\infty \searrow -\infty$	‖		‖	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	

ASYMPTOTES (Rappel).
$x=-3$
$x=-1$
$y = |x+2| = \begin{cases} (x+2) \text{ en } +\infty \\ (x-2) \text{ en } -\infty \end{cases}$

Pour compléter l'étude précédente montrons que (C_f) admet pour AXE de SYMETRIE la droite d'équation $\boxed{x=-2}$

En effet si l'on pose $F(X) = f(-2+X)$ ou $f(X-2)$. on obtient

$$F(X) = \frac{X^2-4X+4+4X-8}{\sqrt{X^2-4X+4+4X-8+3}} = \frac{X^2-4}{\sqrt{X^2+7}} \Rightarrow \boxed{F \text{ PAIRE}}.$$

CQFD.

Enfin dans l'intervalle $]-3;-1[$ on peut considérer la fonction

$$f_1(x) = \frac{x^2+4x}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$$

car sur cet intervalle le TRINÔME $[-x^2-4x-3]$ est STRICTEMENT POSITIF. (Signe de $-(x+1)(x+3)$).

- $\lim\limits_{-1^-} f_1(x) = -\infty$ car $\begin{cases} x^2+4x \to -3 \\ \sqrt{-x^2-4x-3} \to 0^+ \end{cases}$.

- si on pose $F_1(X) = f_1(-2+X) = f_1(X-2) = \dfrac{X^2-4}{\sqrt{1-X^2}} \Rightarrow$ F_1 PAIRE donc $\boxed{x=-2}$ (Δ) AXE de SYM.

- Par symétrie $/(\Delta)$ on a $\lim\limits_{x\to -3^+} f_1(x) = -\infty$.

- $f_1'(x) = \left[(2x+4)\sqrt{-x^2-4x-3} - (x^2+4x)\dfrac{(-2x-4)}{2\sqrt{-x^2-4x-3}}\right]\dfrac{1}{(-x^2-4x-3)}$

$$\Rightarrow f_1'(x) = \frac{(2x+4)(-x^2-4x-3)+(x^2+4x)(x+2)}{(-x^2-4x-3)^{3/2}} \quad (\text{pour } x\in\,]-3;-1[.)$$

$$\Rightarrow f_1'(x) = \frac{(x+2)\left[-2x^2-8x-6+x^2+4x\right]}{(-x^2-4x-3)^{3/2}} = \frac{-(x+2)(x^2+4x+6)}{(-x^2-4x-3)^{3/2}}$$

Donc le signe de $f_1'(x)$ est le signe de $[-(x+2)]$: $\begin{cases} \text{POSITIF sur }]-3;-2[\\ \text{NEGATIF sur }]-2;-1[\end{cases}$.

- la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \dfrac{x^2+4x}{\sqrt{|x^2+4x+3|}}$ admet donc pour courbe la réunion de C_f et de C_{f_1} :