• Limites d'une fonction numérique •

1 - *A l'aide des théorèmes généraux sur les limites, calculer les limites suivantes.*
[Identifier la nature de l'indétermination éventuelle et transformer l'expression pour lever cette indétermination en utilisant les expressions conjuguées et factoriser pour réduire les fractions obtenues]

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{3x+7}-4}{x-3} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{3x+7}-4}{x-3}$$

2 - *Idem :* $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - 2x + 3$; $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2-4x+1} - 2x + 3$

3 - *Soit f la fonction définie par* $f(x) = \dfrac{2x^2+8x+1}{x(x+4)}$.

1°) Indiquer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes des intervalles de définition.

2°) Montrer que f peut se mettre sous la forme $f(x) = A + \dfrac{B}{x^2+4x}$.

3°) En déduire la décomposition de f en trois fonctions élémentaires u, v, w que l'on déterminera telles que $f = w \circ v \circ u$ puis dresser le tableau de variation de f à l'aide des variations des fonctions u, v, w.

4°) Démontrer que la droite d'équation $x = -2$ est un axe de symétrie pour la courbe (C_f)

5°) Tracer les asymptotes de (C_f) et préciser leur position par rapport à (C_f), préciser les points d'intersection éventuelle de (C_f) avec les axes, enfin tracer la (C_f) avec soin dans un repère orthonormé.

4 - *Soit f définie par* $f(x) = \sqrt{1-x}$

1°) Etant donné un nombre $A > 0$, résoudre l'inéquation $f(x) > A$ En déduire que quelque soit le nombre $A > 0$ (a.g.q.l.v.) il existe un nombre $B < 0$ tel que : $x < B \Rightarrow f(x) > A$

2°) Faire une figure indiquant A et B et interpréter la propriété (1°) en termes de limites.

3°) Etant donné un nombre $\varepsilon > 0$, résoudre l'inéquation $|f(x) - 2| < \varepsilon$. En déduire que quelque soit $\varepsilon > 0$ (a.p.q.l.v.) il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $|x + 3| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$

4°) Faire une figure indiquant ε et α et interpréter la propriété (3°) en termes de limites.

5 - *Soit f définie par* $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2-4}}{x+1}$

1°) Montrer qu'il existe un nombre $A > 0$ tel que $|x| > A \Rightarrow \sqrt{4x^2-4} > \sqrt{3}\,|x|$.

2°) En utilisant la définition des limites et les théorèmes de comparaison démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

6 - *On se propose d'étudier les branches infinies de la courbe (C_f) représentative de* $f(x) = \dfrac{x^2-5x+7}{x+1}$

1°) Déterminer a,b,c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$, et étudier les limites de f aux bornes de D_f.

2°) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - 6$ est une asymptote oblique pour (C_f), et déterminer la position relative de (C_f) et (D).

3°) Montrer que (C_f) admet un centre de symétrie et placer les branches infinies de (C_f) dans un repère orthonormé.

7 - *On définit une fonction f par : $f(1) = b$, et pour $x \neq 1$,* $f(x) = \dfrac{(x-1)+|x^2-1|}{x^2+4x-5}$.

1°) Calculer $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

2°) Quelle valeur faudrait-il donner à b pour que f soit continue, ou continue à droite, ou continue à gauche, au point $x_0 = 1$?

8 - *On donne (cadeau)* $f(x) = \sqrt{x^2-x} - \sqrt{x^2-3x+2}$

Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer si elles existent les limites de f aux "points" suivants :

$+\infty$, $-\infty$, 0^+, 0^-, 1^+, 1^-, 2^+, 2^-.