jml@ecole-alsacienne.org

Fonctions Trigo & Suites Numériques

I- [7 pts] **Étude de la fonction trigonométrique** définie par $f(x) = \dfrac{1+\cos 2x}{1-2\cos x}$

1°) Déterminer son ensemble de définition D_f. Etudier la parité et la période de *f*.
En déduire un intervalle d'étude E pour la fonction f.

2°) Démontrer que la dérivée f' peut se mettre sous la forme $f'(x) = \dfrac{2\sin 2x\,(\cos x - 1)}{(1-2\cos x)^2}$

3°) Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle E, et dresser le tableau des variations de *f* sur E.

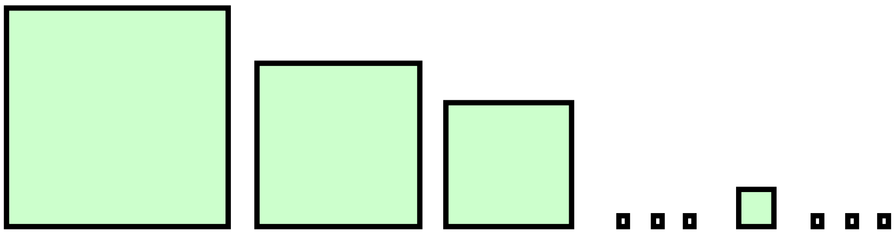
4°) Calculer les limites de *f* aux bornes de E et préciser les extrema dans le tableau de variation.

5°) Déterminer les intersections de (C_f) avec les axes.

6°) Donner les équations des tangentes en $x = 0$ et $x = \pi$.

7°) Tracer la courbe et les tangentes (unités: π = 3cm, ou 3 carreaux) sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.

II- [3 pts] **Étude d'une suite vraiment géométrique.**



On considère la suite de carrés ci-dessus dans laquelle chaque carré a un côté égal aux trois quarts du précédent. On appelle L_n la longueur du côté du carré de rang n, et A_n l'aire de ce carré. On pose L_0 = 3 cm. Calculer l'aire qui serait recouverte par l'ensemble de tous les carrés de la suite infinie ainsi construite.

III- [10 pts] **Étude d'une suite définie par récurrence :** Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé. (unités = 2cm ou 2 carreaux)

A - 1°) Montrer que l'on peut écrire *f* sous la forme $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-1}$

2°) Calculer la dérivée de *f* et dresser le tableau des variations et des limites.

3°) Montrer que la courbe (C_f) admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, et préciser la position de (C_f) par rapport à (Δ).

4°) Tracer la courbe (C_f) et ses asymptotes sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$

B - On définit la suite (u_n) par récurrence à l'aide de la fonction *f* : $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 2$.

1°) Représenter graphiquement les premiers termes de (u_n).

2°) Indiquer si d'après le graphique obtenu la suite (u_n) est monotone ? bornée ? convergente ?

3°) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a : $1 < u_n \leq 2$.

4°) Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.

5°) Déterminer les points fixes de *f*, *c'est-à-dire les points tels que f(x) = x.*

6°) Montrer que si (u_n) admet une limite u celle-ci ne peut être que l'un des points fixes.

7°) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a la relation : $\left|\dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

8°) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, on a la relation : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$.

9°) En déduire par récurrence que, pour tout $n \geq 0$, on a $|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

10°) En déduire la limite de (u_n).