

Fonction Numérique - Produit Scalaire - Barycentres

- I - [8 pts] Étude de la fonction f définie par : $f(x) = (1-x) \sqrt{|x^2 - 1|}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 2 carreaux). Pour cela on pose $f_1(x) = (1-x) \sqrt{x^2 - 1}$ et $f_2(x) = (1-x) \sqrt{1-x^2}$. Pour chacune des deux fonctions f_1 et f_2 , (on appelle respectivement (C_1) et (C_2) leur courbe représentative) :
1. Indiquer sans démonstration l'ensemble de définition, et les limites aux bornes.
 2. Calculer la dérivée pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, factoriser l'expression obtenue et étudier son signe, puis dresser le tableau des variations et des limites. (On pourra tout inscrire dans un seul et même tableau).
 3. Étudier la dérivabilité de f_1 en 1^+ et en -1^- ainsi que la dérivabilité de f_2 en 1^- et en -1^+ .
 4. Que peut-on en conclure pour la dérivabilité de f en -1 et en 1 ?
 5. La courbe (C_f) étant la réunion des deux courbes (C_1) et (C_2) , admet-elle une tangente au point d'abscisse 1 ? au point d'abscisse -1 ? Si oui en donner une équation.
 6. Déterminer une équation de la tangente (T_0) à (C_f) au point d'abscisse 0 .
 7. Dans un même repère placer la tangente (T_0) , les points particuliers (extrema et intersections avec les axes) et tracer les courbes (C_1) et (C_2) , avec soin et propreté.
 8. Que peut-on dire des points de la courbe (C_f) d'abscisse 1 et d'abscisse -1 respectivement ?

II - [7 pts] Soient A et B deux points fixés dans le plan. On appelle I le milieu de $[AB]$ et on pose $AB = 6$ (cm).

1°) Déterminer et construire sur une même figure :

- a. l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $MA^2 - MB^2 = 24$
- b. l'ensemble (F) des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 = 24$
- c. l'ensemble (G) des points M du plan tels que : $\vec{MA} \circ \vec{MB} = 24$

2°) Soit H barycentre de $\{(A;1) ; (B;2)\}$ et K barycentre de $\{(A;1) ; (B;-2)\}$

- a. Construire les points H et K.
- b. Démontrer l'équivalence : $\frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow (\vec{MA} + 2 \vec{MB}) \circ (\vec{MA} - 2 \vec{MB}) = 0$
- c. Démontrer l'équivalence : $(\vec{MA} + 2 \vec{MB}) \circ (\vec{MA} - 2 \vec{MB}) = 0 \Leftrightarrow \vec{MH} \circ \vec{MK} = 0$
- d. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = 2$

III- [5 pts] Soit ABCD un carré de côté a dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en I.

Soit G le barycentre du système $S = \{(A,1);(B,3);(C,-2)\}$; H le milieu de $[AB]$ et K le milieu de $[CD]$.

1°) Écrire la relation vectorielle qui définit le point G.

2°) En déduire que quelque soit un point M du plan, on a : $\vec{MA} + 3 \vec{MB} - 2 \vec{MC} = 2 \vec{MG}$

3°) En déduire que G est le symétrique de K par rapport au côté (AB).

4°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\| \vec{MA} + 3 \vec{MB} - 2 \vec{MC} \| = \| \vec{MA} + \vec{MB} \|$

5°) Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2

6°) Démontrer que $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = 2MG^2 + GA^2 + 3GB^2 - 2GC^2 = 2MG^2 - \frac{7}{2}a^2$.

7°) En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + 3MB^2 - 2MC^2 = a^2$.