École Alsacienne — MATHÉMATIQUES - $1^{ère}$ S_5

jml • 2004-2005 — Contrôle N°4 • 8 décembre. • 100 min.

Étude générale d'une fonction

Limites, branches infinies, asymptotes, dérivée, variations, symétries, tangentes, courbe.

I - [6 pts] Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$. Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 3cm ou 3 carreaux).

1. Calculer f(1) et montrer que f(x) peut s'écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
2. Calculer la dérivée f '(x) et étudier son signe.
3. Dresser le tableau des variations de f, et indiquer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Calculer les valeurs des extrema éventuels et les reporter dans le tableau.
5. Indiquer dans le tableau les coordonnées des points d'intersection avec les axes.
6. Déterminer l'équation de la tangente (T_I) à (C_f) au point I d'abscisse $x = \frac{1}{3}$.
7. Démontrer que le point I d'abscisse $x = \frac{1}{3}$ de (C_f) est un centre de Symétrie de (C_f).
8. Dans un même repère tracer la courbe $(C_{f'})$ représentative de la fonction dérivée f ', la tangente (T_I), placer les points particuliers (extrema et intersections avec les axes) et tracer la courbe (C_f) avec soin et propreté.
9. Comparer les extrema de (C_f) et les points d'intersection de $(C_{f'})$ avec l'axe des abscisses quelle observation peut-on faire ?
10. Quelle interprétation géométrique peut-on donner du minimum de f '(x) par rapport à la courbe (C_f) et à la tangente en I.

II - [6 pts] Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2(x+1)^2}{x^2 \quad 2x \quad 15}$

1°) a) Indiquer l'ensemble de définition D_f et calculer les limites de f aux bornes.
b) En déduire les équations des asymptotes éventuelles.

2°) a) Calculer la dérivée f '(x)
b) Étudier le signe de f '(x)
c) Dresser le tableau des variations et des limites de f.

3°) a) Calculer les coordonnées des extrema.
b) Déterminer les intersections de (C_f) avec les axes de coordonnées.

4°) a) Démontrer que la courbe (C_f) coupe son asymptote horizontale en un point I dont on calculera les coordonnées.
b) En déduire que (C_f) n'admet pas de centre ni d'axe de symétrie.
c) Écrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x = -4$ et tracer (T).

5°) Placer les asymptotes, la tangente (T), et tracer (C_f) avec soin et propreté dans un repère orthonormal (unité 1cm ou 1 carreau).

III- [8 pts] Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x^2 + 20x + 16}{2(x+1)^2}$ et (C_f) la courbe représentative.

1°) Indiquer l'ensemble de définition D_f sous forme d'intervalles, et calculer les limites aux bornes.

2°) Mettre f(x) sous la forme $a x + b + \frac{1}{2}\dfrac{c x + d}{(x+1)^2}$, (déterminer a, b, c, d).

3°) a) En déduire que (C_f) admet pour asymptote oblique la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 3$
b) Montrer que (C_f) coupe (Δ) en un point I à distance finie et calculer les coordonnées de I.
c) Étudier la position de (C_f) par rapport à (Δ).

4°) a) Calculer la dérivée f '(x). Montrer que f '(2) = 0 et en déduire une factorisation de f '(x).
b) Étudier le signe de f '(x).
c) Dresser le tableau des variations et des limites de f.

5°) a) Calculer les coordonnées des extrema..
b) Calculer f(-2) et en déduire toutes les intersections de (C_f) avec les axes de coordonnées.

6°) Écrire une équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x = -4$.

7°) Placer les asymptotes, la tangente (T) et tracer (C_f) dans un repère orthonormé (unité 1cm ou 1 carreaux).