

Polynômes et Fractions Rationnelles

I – [5 pts] Soit $T(x) = x^2 - s x + p$ un trinôme du second degré dont on suppose que le discriminant est positif et qu'il admet 2 racines (distinctes) x' et x'' non nulles.

1°) Calculer les expressions suivantes en fonction de s et p ($s = x' + x''$ et $p = x' x''$)

a. $A = \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''}$

b. $B = (x')^2 + (x'')^2$

2°) a. Rappeler la formule de factorisation de $a^3 - b^3$ et en déduire celle de $a^3 + b^3$

b. En déduire $C = (x')^3 + (x'')^3$ en fonction de s et p .

3°) Application Numérique : on suppose que $s=5$ et $p = 6$ calculer x' et x'' puis A , B , C et vérifier avec les formules obtenues.

II – [5 pts] Soit $P(x) = x^4 - 2x^3 - 22x^2 - 2x + 1$

1°) Calculer $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2}$

2°) On pose $X = x + \frac{1}{x}$

a. Calculer X^2 en fonction de x

b. Montrer $Q(x) = X^2 - 2X - 24 = P_1(X)$

c. Résoudre l'équation $P_1(X) = 0$

d. En déduire toutes les solutions de l'équation $P(x) = 0$

e. Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

III - [5 pts] Soit $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 7}{x + 1}$

1°) Déterminer les coefficients a , b , c , tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}$

2°) Soit $F(x) = f(x - 1) + 4$, (K) la courbe représentative de F dans un repère orthonormé, et $\odot$ celle de la fonction f dans ce même repère.

f. Calculer $F(x)$.

g. Montrer que la fonction F est Impaire. Que peut on en déduire pour (K) ?

h. Indiquer par quelle transformation la courbe (K) se déduit de la courbe $\odot$ de f .

i. Inversement indiquer la transformation qui fait passer de (K) à $\odot$.

j. Que peut on en déduire pour la courbe $\odot$?

IV - [5 pts] 1°) Soit $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

a) Montrer que $P(x)$ est factorisable par $(x + 1)$.

b) Déterminer le quotient de $P(x)$ par $(x + 1)$.

c) En déduire tous les **zéros** de $P(x)$.

d) Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du 1^{er} degré.

2°) On pose $F(x) = \frac{x^3 - 7x - 6}{x - 1}$

a) Effectuer la Division Euclidienne de $P(x)$ par $(x - 1)$.

b) En déduire les coefficients a , b , c , d , tels que $F(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x - 1}$

c) Retrouver directement les valeurs de a , b , c , d en procédant par indentation.

Just do it !