Fonctions élémentaires & associées
Équations paramétriques du Second Degré

[Calculatrice autorisée]

I - [9 pts] Soient (P_1) et (P_2) les paraboles représentatives des fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$$f_1(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - 4$$

1°) Déterminer par le calcul les éléments particuliers : sommets, intersections avec les axes de coordonnées, axe de symétrie, et tracer avec soin les paraboles (P_1) et (P_2) dans un même repère orthonormé (unité : 1 carreau ou 1cm) en indiquant précisément sur la figure tous les résultats trouvés.

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de (P_1) et (P_2)

3°) Tracer la droite (IJ) et écrire son équation cartésienne sous la forme « réduite » y = ax + b.

4°) Résoudre algébriquement puis <u>graphiquement</u> l'inéquation $-\frac{1}{4}x^2 + 2x \geq \frac{1}{4}x^2 + x - 4$ en indiquant sur la figure l'ensemble des Nombres Réels solution.

5°) On pose $f(x) = -f_1(x)$ *et* $g(x) = f(x + 6) - 1$ (c'est-à-dire que $g(x) = -f_1(x + 6) - 1$**)**

On appelle (F) la parabole représentative de la fonction f, et (G) celle de g.

a) Démontrer que g(x) = f2(x).

b) Tracer (F) sans démonstration dans le même repère que (P1).

c) *[Bonus 1Pt*] Indiquer sans démonstration par quelles transformations géométriques on passe de (P1) à (F) puis de (F) à (G).

II – [4 pts] Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{x - 6}{x + 3}$ et (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (R).

1°) Déterminer par identification le nombre A tel que $h(x) = \dfrac{A}{x + 3} + 1$.

2°) Placer le centre, les asymptotes, et les points d'intersection de (H) avec les axes. Tracer la courbe (H) avec soin dans le repère (R) (unité : 1 carreau ou 1cm).

3°) Soit (H1) la courbe représentative de la fonction h1 définie par h1(x) = - h(x). Tracer (H1) sans démonstration, dans le même repère que (H).

III – [7 pts] On considère l'équation paramétrique $x^2 + (m + 2)\,x + 3(m + 2) = 0$ **.**

1°) Déterminer suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de cette équation.
On résumera cette étude dans un tableau, et l'on indiquera en particulier les solutions éventuelles pour ***m= -2, m=0 et m = 10***.

2°) Indiquer la Somme et le Produit des racines de cette équation en fonction de m, et étudier le signe des racines suivant les valeurs de m en complétant le tableau précédent).

3°) Soit (H) l'hyperbole équilatère d'équation $y = h(x) = \dfrac{-9}{x + 3} + 1$ et (D_m) la droite variable d'équation $y = x + m$ **.**

a) Écrire l'équation aux abscisses des points d'intersection de (H) avec (D_m).

b) A l'aide des réponses obtenues en (1°) déterminer suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de points d'intersection de (H) avec (D_m).

c) Tracer (H) et (D_{10}).

d) Interpréter géométriquement les résultats (b) et en déduire les équations des tangentes à (H) aux points ***I(0 ; -2) et J(-6; 4)***. Tracer la droite (IJ) et les deux tangentes.

If you had it this time … don't say anything … just smile !

ÉCOLE ALSACIENNE
jml • 2003-04

MATHÉMATIQUES - 1ère S_4 $\boxed{\textbf{B}}$
Contrôle N°1 • 24 sept. • 100 min.

Fonctions élémentaires & associées
Équations paramétriques du Second Degré

[Calculatrice autorisée]

I - [9 pts] Soient (P_1) et (P_2) les paraboles représentatives des fonctions f_1 et f_2 suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$$

1°) Déterminer par le calcul les éléments particuliers : sommets, intersections avec les axes de coordonnées, axe de symétrie, et tracer avec soin les paraboles (P_1) et (P_2) dans un même repère orthonormé (unité : 1 carreau ou 1cm) en indiquant précisément tous les résultats trouvés sur la figure.

2°) Déterminer les coordonnées des points d'intersection I et J de (P_1) et (P_2)

3°) Tracer la droite (IJ) et écrire son équation cartésienne sous la forme $y = ax + b$.

4°) Résoudre algébriquement puis <u>graphiquement</u> l'inéquation $\frac{1}{4}x^2 + 2x \leq -\frac{1}{4}x^2 + x + 4$ en indiquant sur la figure l'ensemble des Nombres Réels solution.

5°) On pose $f(x) = -f_1(x)$ et $g(x) = f(x - 6) + 1$ (c'est-à-dire que $g(x) = -f_1(x - 6) + 1$)
On appelle (F) la parabole représentative de la fonction f, et (G) celle de g.
a) Démontrer que $g(x) = f_2(x)$.
b) Tracer (F) sans démonstration dans le même repère que (P_1).
c) [Bonus 1Pt] Indiquer sans démonstration par quelles transformations géométriques on passe de (P_1) à (F) puis de (F) à (G).

II – [4 pts] Soit h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{2x - 15}{x - 3}$ et (H) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (R).

1°) Déterminer par identification le nombre A tel que $h(x) = \dfrac{A}{x - 3} + 2$.

2°) Placer le centre, les asymptotes, et les points d'intersection de (H) avec les axes. Tracer la courbe (H) avec soin dans le repère (R) (unité : 1 carreau ou 1cm).

3°) Soit (H1) l'hyperbole représentative de la fonction h1 définie par h1(x) = - h(x). Tracer (H1) dans le même repère que (H).

III – [7 pts] On considère l'équation paramétrique $x^2 + (m - 5)x - 3(m - 5) = 0$.

1°) Déterminer suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de solutions de cette équation.
On résumera cette étude dans un tableau, et l'on indiquera en particulier les solutions éventuelles pour $m = -7$, $m = 0$ et $m = 5$.

2°) Indiquer la Somme et le Produit des racines de cette équation en fonction de m, et étudier le signe des racines suivant les valeurs de m (compléter le tableau précédent).

3°) Soit (H) l'hyperbole équilatère d'équation $y = h(x) = \dfrac{-9}{x - 3} + 2$ et (D_m) la droite variable d'équation $y = x + m$.

a) Écrire l'équation aux abscisses des points d'intersection de (H) avec (Dm).
b) A l'aide des réponses obtenues en (1°) déterminer suivant les valeurs de m l'existence et le nombre de points d'intersection de (H) avec (Dm).
c) Tracer (H) et (D_5).
d) Interpréter géométriquement les résultats (b) et en déduire les équations des tangentes à (H) aux points $I(0; 5)$ et $J(6 ; -1)$. Tracer la droite (IJ) et les deux tangentes.

If you had it this time … don't say anything … just cry !