Calculatrice autorisée

Partie à remettre sur une copie séparée des exercices du tronc commun.

I - Géométrie de l'espace *[5pts]*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ représenté page suivante. Le plan (R) est représenté par ses traces sur les plans de coordonnées ; il a pour équation $x + z = 2$.

1. On donne les points A, B, C définis par leurs coordonnées respectives :

$$A(6\ ;\ 0\ ;\ 0),\quad B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)\quad \text{et}\quad C(0\ ;\ 0\ ;\ 6).$$

a. Placer les points A, B, C dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et tracer le triangle ABC.

b. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Vérifier que le plan (P) a pour équation $x + 2y + z = 6$.

2. On a placé dans le repère les points G, E et F à coordonnées entières.
Le point G est situé sur l'axe $(O\ ;\ \vec{j})$, le point E dans le plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ et le point F dans le plan $(O\ ;\ \vec{j}, \vec{k})$.
Le plan (Q) passant par les points G, E et F est parallèle au plan $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{k})$.

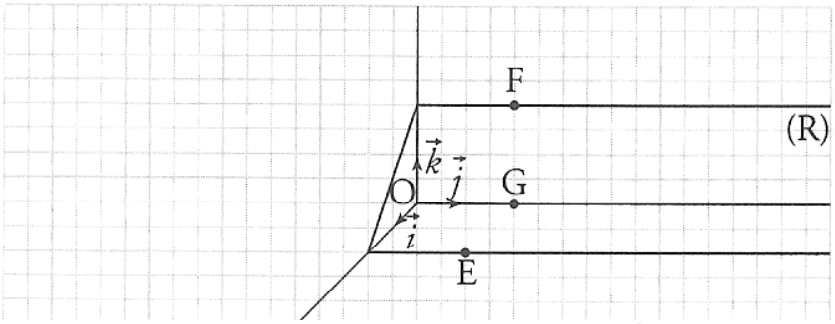
a. Donner l'équation du plan (Q).

b. Donner les coordonnées des points G, E et F.

c. Parmi les points E, F et G, quels sont ceux situés dans le plan (P) ?

d. Quelle est la nature de l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ vérifient le système $\begin{cases} y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$?

e. Représenter cet ensemble sur la figure ci-dessous.



3. On considère le système S de 3 équations à 3 inconnues x, y, z :

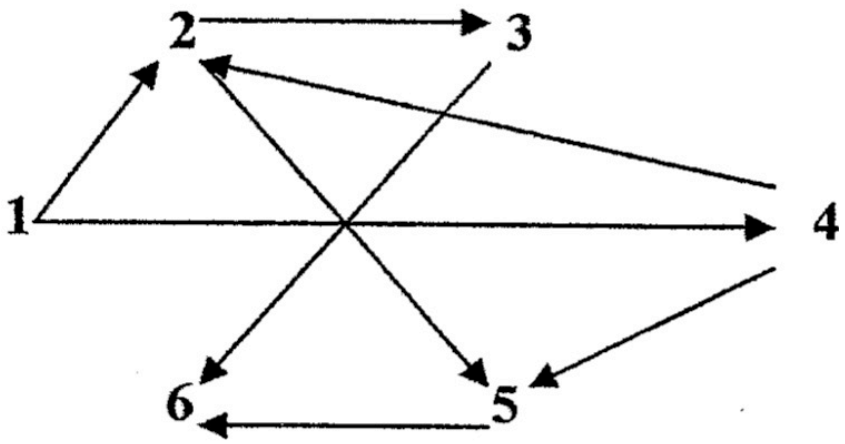
$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y = 2 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}.$$

Quel est l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées sont les solutions du système S ?

T.S.V.P.

II – Matrices associées à un Graphe orienté *[5pts]*

On considère le graphe orienté ci-dessous :



1. On appelle A la matrice 6x6 dont les coefficients $a_{i,j}$ représentent un trajet orienté de la borne i vers la borne j (ligne i, colonne j).
   Si le trajet existe $a_{i,j} = 1$, sinon $a_{i,j} = 0$. Exemples : $a_{2,5} = 1$ et $a_{3,1} = 0$

2. On appelle B la matrice 6x6 dont les coefficients $b_{i,j}$ (ligne i, colonne j) est le nombre de trajets orientés de la borne i vers la borne j en 2 étapes. Exemples : $b_{2,5} = 0$ et $b_{2,6} = 2$

3. On appelle C la matrice 6x6 dont les coefficients $c_{i,j}$ (ligne i, colonne j) est le nombre de trajets orientés de la borne i vers la borne j en 3 étapes. Exemples : $c_{1,6} = 2$ et $c_{2,6} = 0$

I. Déterminer la matrice A

II. Déterminer la matrice B

III. Déterminer la matrice C

IV. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = B$ et que $b_{2,6} = 2$

V. Calculer A^3 et vérifier que $A^3 = C$ et que $c_{1,6} = 3$

T.S.V.P.