

Intérêts Composés et Emprunt immobilier.

Problème : un particulier veut emprunter une somme importante auprès d'une banque pour financer l'achat d'un appartement parisien. Pour cela il doit négocier le taux d'intérêt annuel consenti par le banquier, le nombre d'années d'emprunt, et déterminer le montant des mensualités constantes de remboursement qui lui seront demandées.

NB : on appelle **amortissement** la part du remboursement du capital effectué chaque mois

Étude du problème : Soit C_0 le montant du capital emprunté.
Soit N le nombre de mois fixés pour le remboursement.
Soit t le taux annuel fixé par le banquier
Soit C_n le capital restant dû après amortissement le $n^{\text{ième}}$ mois.
Soit I_n le montant des intérêts payés le $n^{\text{ième}}$ mois.
Soit A_n le montant de l'amortissement payé le $n^{\text{ième}}$ mois.
Soit m le montant des mensualités constantes pour chaque mois.

I - On veut déterminer une *formule* qui permette de calculer m en fonction de C_0, N, t

On suppose que le taux mensuel est égal à $t/12$

On a les relations suivantes

- (1) $m = I_n + A_n$ (mensualité = intérêts + amortissement, le n^{e} mois.)
- (2) $I_{n+1} = C_n \cdot t/12$ (Intérêts du mois suivant = capital restant à payer x taux mensuel)
- (3) $A_n = C_{n-1} - C_n$. (Amortissement du n^{e} mois. = différence entre le capital restant dû le mois précédent et le capital restant dû le n^{e} mois, c'est à dire le remboursement partiel du capital le n^{e} mois.)

On observera évidemment que puisque les mensualités sont constantes et que les intérêts diminuent, les amortissements vont en croissant. On observera que suivant le taux et le nombre d'années, la part des intérêts dans les mensualités est plus grande que la part de l'amortissement ; c'est tout à l'avantage du banquier prêteur, évidemment, et cela justifie de sa part que si l'emprunteur veut rembourser avant terme il doit payer des indemnités (3% du capital restant à payer).

1°) Montrer que la suite (A_n) est une suite géométrique
de raison $q = 1 + t/12$ et de premier terme $A_1 = m - I_1 = m - C_0 \cdot t/12$

2°) Montrer que $C_0 = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_N = A_1 \frac{1 - q^N}{1 - q}$

3°) En déduire que $m = C_0 \frac{t}{12} \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{t}{12}\right)^{-N}}$

II - On veut étudier les variations des suites A_n et I_n sur un tableau : on prend

$C_0 = 300\,000 \text{ €}$; $N = 15 \times 12 = 180 \text{ mois}$, $t = 0,055 = 5,5 \%$

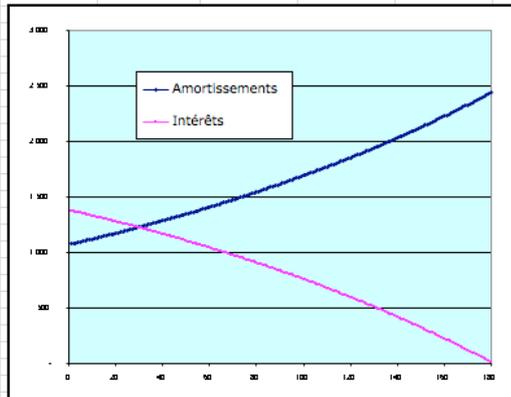
1°) Calculer m avec votre calculatrice ou en écrivant la formule dans une cellule de l'ordinateur.

2°) Construire un tableau de valeurs du type suivant

Pour cela on utilisera les relations (1) (2) (3) pour définir les formules des cellules B4, C4, D4, E4

Puis on étendra ces formules jusqu'à la ligne correspondant à la valeur de N .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	mois	Mensualités	Intérêts	Amortissements	Capital restant dû	Taux	C_0	N		
2	n	m	I_n	A_n	C_n	5,5%	300 000	180		
3	0	0	0	0	300 000					
4	1	2 451,25 €	1 375,00 €	1 076,25 €	298 923,75 €					
5	2	2 451,25 €	1 370,07 €	1 081,18 €	297 842,57 €					
6	3	2 451,25 €	1 365,11 €	1 086,14 €	296 756,43 €					
7	4	2 451,25 €	1 360,13 €	1 091,12 €	295 665,31 €					
8	5	2 451,25 €	1 355,13 €	1 096,12 €	294 569,19 €					
9	6	2 451,25 €	1 350,11 €	1 101,14 €	293 468,05 €					
10	7	2 451,25 €	1 345,06 €	1 106,19 €	292 361,86 €					
11	8	2 451,25 €	1 339,99 €	1 111,26 €	291 250,60 €					
12	9	2 451,25 €	1 334,90 €	1 116,35 €	290 134,25 €					
13	10	2 451,25 €	1 329,78 €	1 121,47 €	289 012,78 €					
14	11	2 451,25 €	1 324,64 €	1 126,61 €	287 886,18 €					
15	12	2 451,25 €	1 319,48 €	1 131,77 €	286 754,40 €					
16	13	2 451,25 €	1 314,29 €	1 136,96 €	285 617,44 €					
17	14	2 451,25 €	1 309,08 €	1 142,17 €	284 475,27 €					
18	15	2 451,25 €	1 303,85 €	1 147,41 €	283 327,87 €					
19	16	2 451,25 €	1 298,59 €	1 152,66 €	282 175,20 €					
20	17	2 451,25 €	1 293,30 €	1 157,95 €	281 017,26 €					
21	18	2 451,25 €	1 288,00 €	1 163,25 €	279 854,00 €					
22	19	2 451,25 €	1 282,66 €	1 168,59 €	278 685,42 €					
23	20	2 451,25 €	1 277,31 €	1 173,94 €	277 511,47 €					
24	21	2 451,25 €	1 271,93 €	1 179,32 €	276 332,15 €					
25	22	2 451,25 €	1 266,52 €	1 184,73 €	275 147,42 €					
26	23	2 451,25 €	1 261,09 €	1 190,16 €	273 957,27 €					
27	24	2 451,25 €	1 255,64 €	1 195,61 €	272 761,65 €					
28	25	2 451,25 €	1 250,16 €	1 201,09 €	271 560,56 €					
29	26	2 451,25 €	1 244,65 €	1 206,60 €	270 353,96 €					



3°) Construire sur un même graphique (nuage de points) les courbes représentatives de (A_n) et (I_n) en fonction de n .

4°) Modifier le contenu des cellules fixes F2, G2, N2 et observer les transformations du graphique. En particulier déterminer le taux à partir duquel les intérêts sont égaux à l'amortissement.