jml@ecole-alsacienne.org
2006-2007

MATHÉMATIQUES- Spécialité - 1ère ES1 & ES2

Contrôle N°3 • 1er février • 50 min.

Calcul Matriciel

I

Pour les exercices 65 à 69, on donne une matrice A inversible. Calculez A^{-1} à l'aide d'une calculatrice.

1°) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2°) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3°) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$.

II

On considère les matrices :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifiez que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et que :

$$A = P \times D \times P^{-1}.$$

2. Calculez D^2, D^3 et D^4.

3. Expliquez pourquoi :

$$A^2 = P \times D^2 \times P^{-1} ;\ A^3 = P \times D^3 \times P^{-1} ;$$
$$\text{et } A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}.$$

4. Calculez A^4 de deux manières :

a) directement, c'est-à-dire en calculant :

$$A \times A \times A \times A ;$$

b) en utilisant la formule $A^4 = P \times D^4 \times P^{-1}$.

III

Une firme multinationale fabrique des motos dans trois usines : l'une au Japon, l'autre en Grande-Bretagne et la dernière en France. Les capacités de production journalière des trois usines de production sont données dans le tableau ci-dessous :

Unité / Modèle	Japonaise	Britannique	Française
A	140	20	5
B	110	260	2
C	400	80	280

Au 31 mars 2001, les commandes enregistrées s'élèvent à 38 650 modèles A, 64 240 modèles B et 158 800 modèles C. On note x, y et z le nombre de journées de travail nécessaires respectivement à l'usine japonaise, à l'usine britannique et à l'usine française.

1. Traduisez les données de l'énoncé sous forme d'un système (S).

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 140 & 20 & 5 \\ 110 & 260 & 2 \\ 400 & 80 & 280 \end{pmatrix}$. Vérifiez que (S)

équivaut à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38\,650 \\ 64\,240 \\ 158\,800 \end{pmatrix}$.

3. Déduisez-en la résolution du système (S).